

## Programação Linear (PL)

Um PL está na *forma aumentada* se todas as variáveis são não negativas e todas as restrições funcionais estão expressas por equações (introduzindo, se necessário, variáveis não negativas, designadas por *variáveis auxiliares* ou *variáveis desvio*).

Uma *solução aumentada* é uma solução do problema aumentado.

**Propriedade 5:** Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

### Passagem de Modelos de PL à Forma Aumentada de Maximização

$$(i) \quad \text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \rightarrow \quad \text{Max}(-Z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j \quad (\text{Min } Z = -\text{Máx}(-Z))$$

$$(ii) \quad \text{Restrição de tipo '≤': } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad \wedge \quad x_{n+i} \geq 0$$

$$(iii) \quad \text{Restrição de tipo '≥': } \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \geq b_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - x_{n+k} = b_k \quad \wedge \quad x_{n+k} \geq 0$$

$$(iv) \quad \text{Variável Não Positiva: } x_j \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'_j = -x_j \geq 0$$

$$(v) \quad \text{Variável Livre: } x_j \text{ livre} \Rightarrow x_j = x'_j - x''_j, \text{ com } \begin{cases} x'_j = \text{Máx}\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = \text{Máx}\{0; -x_j\} \geq 0 \end{cases}$$

### Soluções Básicas Admissíveis

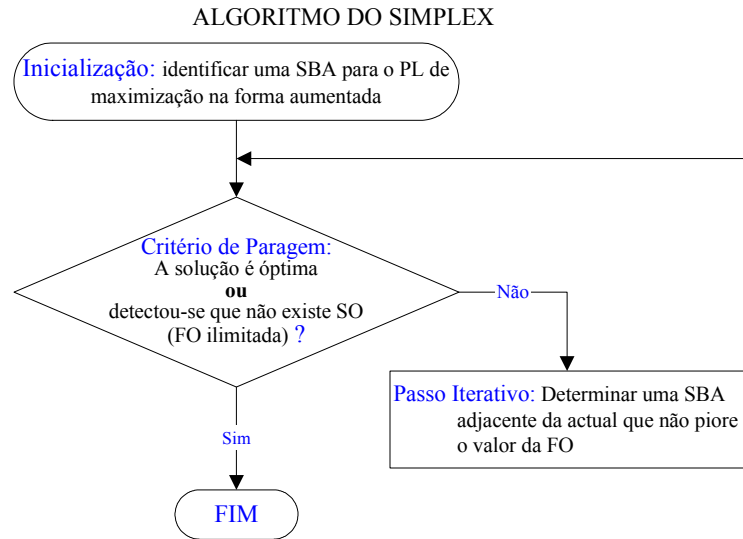
Dado o problema aumentado com  $m$  equações e  $\ell$  ( $> m$ ) variáveis, se se atribuir o valor zero a  $\ell - m$  variáveis – *Variáveis Não Básicas* (VNB) – e se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes  $m$  variáveis – *Variáveis Básicas* (VB) – obtém-se uma *Solução Básica* (SB).

Uma *Solução Básica* diz-se *Admissível* (SBA) se todas as variáveis respeitarem as restrições de sinal. Caso não respeite as restrições de sinal diz-se uma *Solução Básica Não Admissível* (SBNA).

A cada solução básica admissível corresponde um só ponto extremo da região admissível (RA), também designado por *solução de canto admissível*. Cada ponto extremo da RA tem associada pelo menos uma SBA.

Duas *soluções básicas* dizem-se *adjacentes* se os respectivos conjuntos de variáveis básicas apenas diferem por uma variável (e, consequentemente, os respectivos conjuntos de variáveis não básicas apenas diferem por uma variável). Graficamente, duas soluções de canto admissíveis são adjacentes se pertencerem ao mesmo segmento de recta.

## Resolução Analítica de Problemas de PL



### Algoritmo do Simplex (George Dantzig, 1947)

Algoritmo para a resolução de um problema de PL na forma standard<sup>(1)</sup>, com os termos independentes (RHS) não negativos.

**Passo 1:** Escrever o PL na forma aumentada

**Passo 2:** Determinar uma SBA

Fazer  $k \leftarrow 1$

{Iteração  $k$ }

**Passo 3:** Se SBA corrente é ótima **FIM**

Senão, continuar para o passo 4

**Passo 4:** Aplicar o “critério de entrada” para escolher  $x_p$ , a variável que se tornará VB

Aplicar o “critério de saída”

Se não conseguir **FIM** (FO ilimitada)

Se sim, seja  $x_r$  a variável escolhida para passar a VNB

**Passo 5:** Actualizar o quadro do Simplex obtendo a nova SBA (trocar as variáveis  $x_p$  e  $x_r$ )

Fazer  $k \leftarrow k + 1$

Voltar a 3.

**Observações:** No passo 4, como “critério de entrada”, escolher  $x_p$ , a variável que tiver associado o coeficiente mais negativo (entre as com coeficiente negativo) na linha da FO. Como “critério de saída”, por forma a garantir a admissibilidade da solução, calcular o mínimo dos quocientes entre os termos independentes e os respectivos coeficientes positivos na coluna de  $x_p$ . A variável que passa a VNB  $x_r$  é a associada a esse valor mínimo.

<sup>(1)</sup> O algoritmo do *Simplex* pode ser adaptado para a resolução de qualquer problema de PL.